

L'àlgebra vectorial en la geometria i en la física del nou batxillerat

J. M. Parra* i R. González†

Donem una oportunitat a la reforma

De la programació de l'àrea de matemàtiques del nou batxillerat (DOGC núm. 2181 de 13.3.1996), els físics no podem deixar de constatar el notable creixement de la importància relativa de l'estudi del càlcul vectorial en dues i tres dimensions. Considerem que és una elecció encertada, ja que poques àrees de la matemàtica mostren una connexió tan immediata amb la realitat física que ens envolta: ens movem en un espai de tres dimensions i gran part de les magnituds físiques (posicions, velocitats, acceleracions, forces, camps electromagnètics, etc.) són vectors. La crònica deficiència o el retard de les matemàtiques que tant dificulta l'ensenyament de la física pot quedar substancialment disminuït. D'aquesta connexió amb la física, l'ensenyament de la matemàtica en sortirà també beneficiada, ja que, com apuntava Bertrand Russell: "una de les dues raons per les quals els alumnes sense una innata inclinació envers les matemàtiques són conduïts a odiar-les és que no són mostrades com a base de tot el nostre coneixement científic, tant teòric com pràctic: no es mostra a l'alumne, de manera convincent, que tot allò que podem entendre del món i allò que podem fer amb les màquines, ho podem entendre i fer gràcies a les matemàtiques" (pàg. vii, Clifford, 1955).

Però, per tal que les connexions i els avantatges mutus esmentats es facin realitat, cal que els coneixements de càlcul vectorial siguin substantius i passin a formar part de les capacitats operatives dels alumnes. Des de la nostra perspectiva, això implica una determinada lectura de la programació, una reordenació i elaboració curricular dels continguts exigits que no se segueix de forma immediata de la seva enumeració en el DOGC. Dels títols es desprèn que els temes són els mateixos que ja es feien en l'antic batxillerat i que el guany de pes relatiu és, simplement, degut a la reducció/supressió d'altres temes com ara la combinatòria, els nombres complexos, la probabilitat i l'estadística (els dos darrers obligatoris a les àrees no científicotècniques!). De la seva ordenació es dedueix

que no es pretén resoldre el segon gran defecte de l'ensenyament de les matemàtiques assenyalat per Russell: "que les dificultats no es minimitzen en connectar-les amb uns principis centrals fàcilment copsats, de tal manera que es presenta l'edifici de les matemàtiques com una col·lecció de petites barraquetes separades i no com un únic temple que segueix un disseny unitari" (Clifford, 1955).

Creiem possible oposar-nos a aquesta lectura "destructiva", partint dels principis inspiradors de la reforma: la reducció del temari de matemàtiques (no és el cas del de física) fa possible un aprofundiment i un domini millor dels temes seleccionats. Seria un greu error deixar passar aquesta oportunitat de connectar significativament les matèries de física i matemàtiques que la nova programació fa possible en apostar pel càlcul vectorial com un dels continguts bàsics de l'àrea de matemàtiques. Amb la seqüència curricular que proposem per al càlcul vectorial fem front, al nivell concret dels ensenyaments, de la imposada i poc racional separació departamental entre matemàtiques d'una banda, i física-química-ciències naturals de l'altra. Una separació que continua ignorant l'estret vincle genètic que hi ha entre física i matemàtiques, palès en una interminable llista de savis compartits: Bernouilli, Leibniz, Newton, Euler, Lagrange, Fermat, D'Alembert, Fourier, Poisson, Gauss, Hamilton, Grassmann, Jacobi, Minkowski (i fins i tot Hilbert, paradigma del matemàtic pur, entra de ple dret en aquesta categoria si es té present la seva contribució a la relativitat general, considerada a nivell popular com a obra quasi exclusiva d'Einstein).

Recollim també amb satisfacció l'èmfasi que la nova programació posa en la contextualització històrica dels coneixements que s'imparteixen. Perquè, si bé som conscients que no sempre, ni tan sols en la majoria de les ocasions, l'aproximació històrica constitueix la manera més senzilla d'introduir un concepte o una teoria, no és menys cert que un ensenyament que ignora la història renuncia a establir arrels en l'esperit de la persona i s'exposa a quedar reduït a un entrenament d'efectes transitoris. En conseqüència, la nostra proposta es caracteritza per una utilització selectiva de la història, amb inclusió de documents originals o fragments d'aquests documents, fins allà on aquesta sigui compatible amb els objectius proposats pel que fa a continguts. Considerem

*Josep Manel Parra Serra (Girona, 1952) és doctor en Física per la Universitat de Barcelona (1985) i actualment és professor del Departament de Física Fonamental de la UB.

†Ramon González Calvet (Parelada, 1964) és doctor en Química per la Universitat de Barcelona (1993) i actualment és professor de matemàtiques de l'IES Pere Calders de Cerdanyola.

que aquesta és una manera de fer partícips als nostres alumnes de l'“experiència matemàtica”, una apassionant i sovint menystinguda part de la història del pensament. També es contribueix així a exemplificar el caràcter universal de la cultura i a ser conscients d'algunes de les mancances més assenyalades del nostre passat cultural.

Oferim les indicacions que segueixen com una base adequada per definir una proposta engrescadora de centre de la qual els professors d'ambdós seminaris i, per descomptat, els alumnes, en sortiran beneficiats en la seva tasca d'ensenyar i aprendre significativament.

El programa reformat de càlcul vectorial i geometria lineal

Apuntades ja les possibilitats i algunes de les dificultats organitzatives que planteja la programació marc per al nou batxillerat, passem a exposar la seqüenciació de continguts per a l'ensenyament del càlcul vectorial en dues i tres dimensions. Aquesta seqüenciació correspon al que anomenaríem un segon nivell de concreció, amb un marge encara força ampli per a la iniciativa individual del professor, que li ha de permetre una òptima adaptació a l'estat de coneixements i actituds dels seus alumnes. Alhora, però, representa una alteració substancial de l'ordre i importància relativa dels diversos subtemes continguda en el DOGC. En tant que fonamentades en raons de natura estrictament pedagògica i científica que oportunament exposarem, entenem que no entren en conflicte amb l'esperit de la programació de la reforma. Ben al contrari, pretenem que constitueixin una aportació significativa a la reforma dels ensenyaments per part de docents implicats i identificats plenament amb el seu paper de transmissors dels coneixements i facilitadors de l'aprenentatge per part dels alumnes. Si la reforma ha d'acomplir, ni que sigui parcialment, els ambiciosos objectius que es pregonen en les disposicions oficials, ho farà amb les aportacions que, tendents a assolir aquests objectius, realitzin en la pràctica quotidiana els professors de les diferents disciplines. Ni teòrics de la pedagogia (amb possible pràctica en l'ensenyament de les teories pedagògiques actuals) ni programadors oficialment designats o equips editorials més o menys qualificats poden (aspirar a) ser alguna cosa més que elements “facilitadors” de l'èxit de la reforma. El veritable element decisiu serà sempre la mútua realització personal en la relació alumne-professor. A fer més plena i significativa aquesta relació en el limitat domini del càlcul vectorial va adreçada la nostra proposta.

Seqüència didàctica

Alguna cosa més que nombres: les magnituds que expressen l'extensió

– Lectures: cartes de Leibniz a Huygens queixant-se de les limitacions de l'àlgebra i les coordenades cartesianes

per tractar les qüestions geomètriques i físiques (Parra, 1995).

– Un problema: la representació formal de la circumferència.

– Informació històrica sobre l'obra de Grassmann, com a realitzador del programa de Leibniz (Parra, 1995).

L'àlgebra del pla i de l'espai

– Les operacions de translació i la coordinació dels punts del pla i de l'espai. *L'estat de posició d'una partícula i el seu canvi en el moviment en forneixen els exemples bàsics a partir dels quals cal abstraure les corresponents idees matemàtiques de punt i vector.*

– Les translacions segons direccions ortogonals, el càlcul de la distància (teorema de Pitàgores) i el producte geomètric de vectors. *Se subratlla el caràcter mètric de l'espai que ens envolta, sempre dins el marc de la física newtoniana, la importància de les coordenades cartesianes en els càlculs i de l'anàlisi vectorial en el raonament. La lectura d'una part del prefaci del Treatise on Electricity and magnetism, de Maxwell, referida a aquestes qüestions, permet apreciar-ne la importància.*

– El caràcter no commutatiu del producte de vectors. Interpretació geomètrica de les seves parts progressiva i regressiva (Grassmann) com a àrea orientada i com a projecció. *Mitjançant dos daus es pot mostrar fàcilment que, en compondre dues rotacions entorn a diferents eixos, el resultat depèn de l'ordre de la composició o producte. No és estrany, per tant, que símbols capaços de representar operacions a l'espai no commutin. Cal transmetre l'apreciació del sentit de l'àrea a partir de la primera llei de Kepler i la construcció del moment angular com a producte dels vectors posició i quantitat de moviment.*

– L'àlgebra generada pels vectors (quins són els elements, les operacions i les propietats bàsiques d'aquest càlcul). *Cal transmetre l'apreciació que les magnituds extensives poden correspondre a les dimensions 0 (escalars), 1 (vectors), 2 (àrees), 3 (volums), i que el producte geomètric les unifica en un sistema únic de dimensió 4 per al pla i dimensió 8 per a l'espai.*

– La dependència lineal: el producte exterior i el càlcul dels determinants. La independència lineal de n vectors com a capacitat per generar un volum n -dimensional. D'aquí s'origina, amb tota naturalitat, la noció de determinant, la manera de calcular-lo i les seves propietats fonamentals.

– El “producte vectorial de la física”. Vectors (polars) i bivectors (vectors axials). *Importantíssima lliçó, sorprenentment “esquivada” en la programació del DOGC que es limita a contemplar el producte escalar de vectors. Resulta convenient la discussió sobre l'ús –i l'abús– de la dualitat (substitució d'una àrea per un vector perpendicular a ella) i que es pot fer a partir dels comentaris de Clifford en l'article que establí l'àlgebra geomètrica de l'espai (Clifford, 1878).*

Operacions sobre vectors

– Rotacions i reflexions de vectors. *El moviment d'un cos, la relació entre dos sistemes d'observació girats un respecte de l'altre, motiven el tractament d'aquestes operacions. El producte geomètric en permet la formulació amb tota naturalitat.*

– Els nombres complexos i la geometria del pla (enguany, 1997, és el 200 aniversari d'aquesta connexió!). *Identificada la unitat imaginària com a operació de rotació de 90° en el pla, res no en dificulta la introducció dels nombres complexos i les seves propietats fonamentals. Són els operadors que giren i dilaten o arrensen els vectors del pla.*

– L'aplicació exponencial i les relacions amb la trigonometria. *Aprofundiment de la noció d'exponenciació com a pas al límit d'un canvi molt petit aplicat un nombre molt gran de vegades. La simplicitat del càlcul de les expressions trigonomètriques per a la suma i la diferència d'angles fan aconsellable diferir la seva explicació fins a arribar a aquest punt.*

– Els “quocients de vectors en tres dimensions”: els quaternions i la seva diversa història en matemàtiques i física. *Expliquem la història de les lletres i, j, k, àmpliament utilitzades en els textos de física. En reconeixem el caràcter transitori envers la formulació definitiva de l'àlgebra geomètrica com a estructura matemàtica plenament satisfactòria.*

– Semblances i diferències amb d'altres entitats matemàtiques (nombres, polinomis, conjunts). *És un tema d'agradable reflexió contemplar com, de problemes concrets i d'obligada resolució per a la ciència, s'abstreu sistemes matemàtics que comparteixen uns trets i difereixen en altres.*

Introducció a l'àlgebra matricial

– Formulació matricial de les rotacions. *La introducció de les matrius es motiva directament com a regla de càlcul per estendre per linealitat les transformacions dels vectors base. Es pot facilitar informació sobre la seva omnipresència en la matemàtica d'avui.*

A partir d'aquest punt, amb la teoria dels determinants ja solucionada, i una bona base geomètrica – capacitat de representació espacial – per part dels alumnes, els temes de càlcul matricial que segueixen no necessiten de comentaris especials.

- Els canvis de base i la seva realització matricial.
- Les transformacions lineals en general.
- L'àlgebra matricial. La inversió de matrius 2×2 i 3×3 .
- Interpretació geomètrica i solució dels sistemes d'equacions lineals.

La geometria analítica del pla i de l'espai

Un desenvolupament global d'aquest tema, d'acord amb els principis de l'àlgebra geomètrica es pot trobar a (González, 1996).

– Equacions de rectes i plans, circumferències i esferes.

– Relacions mètriques entre objectes geomètrics senzills.

La connexió matemàtiques-física

– L'operador nabla: el seu descobriment per Hamilton, algunes de les seves aplicacions i el seu càlcul efectiu en casos senzills. *La formulació original de Hamilton, amb els símbols de derivació ordinària respecte de les coordenades, és del tot convenient a aquest nivell. El càlcul de les forces degudes a potencials senzills coordina exercicis matemàtics amb problemes de profund significat físic.*

– Càlcul del camp elèctric creat per un conjunt de càrregues puntuals. *Aplicant el principi de superposició per als potencials i les forces, l'ús de l'operador nabla ens permet resoldre de manera sistemàtica aquest tipus de problema paradigmàtic.*

– L'espai-temps, la seva àlgebra vectorial i la teoria de la relativitat. *Per als professors i alumnes que s'hi trobin motivats, ben poc esforç els pot dur a tractar qüestions fonamentals de la teoria de la relativitat. El sistema ensenyat funciona: 1 escalar, 4 vectors, 6 plans, 4 trivolums i un 4-volum són les magnituds extensives de l'univers d'Einstein; el càlcul, basat amb la experiència com també ho era el de l'espai ordinari, segueix les mateixes normes i criteris.*

Ajuts a l'aplicació de la proposta

Els autors han impartit en els darrers anys cursos a l'Escola d'Estiu del Col·legi de Doctors i Llicenciats dedicats a (la reforma de) la docència de l'àlgebra vectorial en l'ensenyament preuniversitari. Els temaris sobrecarregats i la selectivitat han estat sempre considerats, per nosaltres i pels assistents als cursos, com a veritables obstacles per a un aprenentatge significatiu com el que es propugna obtenir amb la reforma. Projectes com el proposat aquí són els que, portats a terme, poden fer canviar allò que “es canvia tot perquè, en el fons, res no canviï”. Conscients que la importància d'un canvi es mesura amb la magnitud de la resistència que s'hi oposa, oferim el nostre suport, consell i col·laboració a aquells seminaris de centres de secundària que s'animin a impartir un càlcul vectorial plenament significatiu, interdisciplinari i d'innegables qualitats matemàtiques.

Referències

- CLIFFORD, W. K., Applications of Grassmann Extensive Algebra, *Am. Jour. Math*, **1**, 350-358 (1878).
- CLIFFORD; W. K., *The Common Sense of the Exact Sciences*, Dover (Nova York, 1955).
- GONZÁLEZ, R., *Tractat de geometria plana mitjançant l'àlgebra geomètrica*, Llibreria L'Escola (Cerdanyola del Vallès, 1996).
- PARRA, J. M., L'àlgebra vectorial. Una història que ens cal reescriure, *Butlletí S.C.M.*, **10**, 75-120 (juliol 1995).